第 4 期 电 子 学 报 Vol. 36 No. 4
2008 年 4 月 ACTA ELECTRONICA SINICA Apr. 2008

随机非线性系统自由状态方程的任意阶近似解

曹少中[1,2] ,刘贺平[2] ,涂序彦[2]
(1. 北京印刷学院信息与机电工程学院,北京 102600 ; 2. 北京科技大学信息工程学院,北京 100083)

摘　要: 针对非线性系统的随机性的特点,提出了随机非线性系统自由状态方程的任意阶近似解法. 该解法从自由状态空间中的广义朗之万梯度方程出发,利用常数变易法导出了与广义朗之万方程等价的广义的第二类非线性、随机性 Valterra 积分方程,采用逐次逼近法求得了方程的任意阶近似解. 最后,讨论了非线性、随机性对系统状态空间转移的影响. 随机非线性系统自由状态方程的任意阶近似解法为随机非线性系统的定量分析提供了一种有效方法.

关键词: 随机非线性系统; 朗之万梯度方程; Valterra 积分方程; 任意阶近似解
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2008) 04-0785-04

Any Order Approximate Solution of the State Equation for Uncontrolled Random Nonlinear Systems

CAO Shao-zhong[1,2] ,LIU He-ping[2] ,TU Xu-yan[2]
(1. *College of Information and Mechanical Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing* 102600 , *China*;
2. *School of Information Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing* 100083 , *China*)

Abstract: Armed at the difficult solution of uncontrolled random nonlinear systems, a method for any order approximate solution of the state equation for uncontrolled random nonlinear systems is proposed. Based on general Langevin gradient equation in uncontrolled state space, the random nonlinear Volterra's integral equation for the second kind, which is equivalent to general Langevin gradient equation, is obtained, by utilizing constant variation method. Then, any order approximate solution of the equation is also obtained, by successive approximation method. Finally, the influences of nonlinearity and randomness for state space transformation of the system is discussed. The method for any order approximate solution of the state equation for uncontrolled random nonlinear systems is an effective method of quantitative analysis for random nonlinear systems.

Key words: random nonlinear system; Langevin gradient equation; Volterra's integral equation; any order approximate solution

1 引言

对于一自由系统由于存在着各种因素引起的不确定性,所以系统的状态不可能工作在人们期望和设计的理想状态,其状态不但具有确定性、非线性,而且还具有随机性,因此实际系统往往工作于一个理想状态附近一个允许的状态范围内. 关于非线性、随机性对系统自由状态的影响,人们已进行了大量研究工作[1~7]. 其中,我国著名的动力学学者,谢羲教授给出了非线性自由状态方程的任意阶近似解[1][2]. 但是目前尚未见有人发表,非线性、随机性自由状态方程任意阶近似解的有关研究成果.

本文以自由状态空间中的广义朗之万梯度方程作为描述非线性、随机性自由状态的动态变化规律的基本方程,对这一课题进行了探讨. 我们通过采用常数变易法导出了与广义朗之万方程等价的广义的第二类非线性、随机性 Valterra 积分方程,采用逐次逼近法求得了方程的任意阶近似解,并进一步讨论了非线性、随机性对系统状态空间转移的影响.

2 广义朗之万梯度方程

设系统自由状态可用一组状态变量来描述,写为向量形式为:

$$X(t) = [X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

式中: $X(t)$ 为状态向量, $X(t) \in R^n$; $X_i(t)$ 为状态变量(标量), $i = 1, 2, \cdots, n$; n 为维数(有限正整数); t 为自变量时间; T 为"转置"符号; R^n 为 n 维状态空间.

收稿日期:2006-11-12;修回日期:2007-2-26
基金项目:国家自然科学基金(No. 60673101 ,No. 60374032) ,国家 863 高技术研究发展计划(No. 2006AA04Z110) ,北京市中青年骨干教师培养计划,北京印刷学院引进人才项目;北京市教育委员会科技发展计划面上项目(No. KM200810015003)

设我们的期望和设计状态用一组理想的状态变量来描述,写为向量形式为

$$\mathrm{X}_C = [X_{C1}, X_{C2}, \cdots, X_{Cn}]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

我们作坐标平移变换,把 n 维状态空间的原点移到理想状态向量所对应的点上来,即令

$$x_i(t) = X_i(t) - X_{ci}, i = 1,2,\cdots,n \tag{3}$$

写成向量形式为:

$$\mathrm{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

由于决定系统状态的因素既有确定性因素,又有非确定性随机性因素,因此,我们假定系统的自由状态的动态变化规律服从状态空间中的广义朗之万梯度方程.

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{f}(\mathrm{x}(t), t) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{x}(t), t) \tag{5}$$

式中:$\mathrm{f}(\mathrm{x}(t), t)$ 为非线性确定性分量;$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{x}(t), t)$ 为随机性分量.

根据统计理论式(5)可以改写为[8]

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{f}(\mathrm{x}(t), t) - \mathrm{D}\nabla_x \ln \boldsymbol{\rho}(\mathrm{x}(t), t) \tag{6}$$

式中:D 为系统状态向量在状态空间中的扩散矩阵;∇_x 为梯度算符;ρ 为系综密度分布函数.

为了便于求解方程(6),我们进一步寻求随机分量的其它表示形式.根据总几率守恒,不难导出:

$$\ln \boldsymbol{\rho}(\mathrm{x}(t), t) = -\ln J(\mathrm{x}(t), t) \tag{7}$$

将式(7)代入式(6),则非线性、随机性广义朗之万梯度方程变为下面的形式

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{f}(\mathrm{x}(t), t) + \mathrm{D}\nabla_x \ln J(\mathrm{x}(t), t) \tag{8}$$

此式就是我们所求的非线性随机性自由状态向量方程,即广义朗之万方程.此式和(6)式相比较,使我们避开了几率密度分布函数,使之更便于求解.

3 自由随机非线性系统状态方程的任意阶近似解

为了求解方程(8),我们假定自由随机非线性系统状态始终处于我们所期望的理想状态附近,即 $x_i(t)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 是个一级小量,因此,方程(8)中的 $\mathrm{f}(\mathrm{x}(t), t)$ 可以相对于理想状态,即 $x_i = 0$,$(i = 1,2,\cdots,n)$ 点作 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} f_i(x(t), t) = & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} a_{ij_1j_2}(t) x_{j_1}(t) x_{j_2}(t) \\ & + \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n} a_{ij_1j_2j_3}(t) x_{j_1}(t) x_{j_2}(t) x_{j_3}(t) + \\ & \cdots + \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n} a_{ij_1j_2\cdots j_k}(t) x_{j_1}(t) x_{j2}(t) \cdots \\ & \cdot x_{j_k}(t) + \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

为书写简洁起见,我们令高次项为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_i(x(t), t) = & \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} a_{ij_1j_2}(t) x_{j_1}(t) x_{j_2}(t) + \cdots \\ & + \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n} a_{ij_1j_2\cdots j_k}(t) x_{j_1}(t) x_{j_2}(t) \cdots \\ & x_{j_k}(t) + \cdots \qquad i = 1,2,3,\cdots,n \end{aligned} \tag{10}$$

于是式(9)可改写为下面的形式

$$f_i(x(t), t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t) + \boldsymbol{\Psi}_i(x(t), t) \tag{11}$$

令

$$\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\Psi}_1 \ \boldsymbol{\Psi}_2 \cdots \boldsymbol{\Psi}_n]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

则由式(11)、(12)有

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}(t), t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{x}(t) + \boldsymbol{\Psi}(\mathrm{x}(t), t) \tag{13}$$

将式(13)代入式(8),则自由随机非线性系统状态方程变为

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{x}(t) + \boldsymbol{\Psi}(\mathrm{x}(t), t) + \mathrm{D}\nabla_x \ln J(\mathrm{x}(t), t) \tag{14}$$

式中:$\mathrm{A}(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n}$ 为 $n \times n$ 矩阵.

下面我们分三步求方程(14)的任意阶近似解.

(1) 齐次方程的解

我们首先求解方程(14)的齐次方程

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{x}(t), \mathrm{x}(t=0) = \mathrm{x}(0) \tag{15}$$

采用 Picard 递归积分法求解,设齐次方程(15)的解具有下述形式:

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{R}(t)\mathrm{x}(0) \tag{16}$$

式中 $\mathrm{x}(0)$ 为初始条件.

把式(16)代入式(15),可得矩阵 $\mathrm{R}(t)$ 满足如下方程:

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{R}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}(t)\mathrm{R}(t) \tag{17}$$

初始条件为 $\mathrm{R}(0) = \mathrm{I}$,I 为 $n \times n$ 单位矩阵.

根据 Picard 递归积分法,$\mathrm{R}(t)$ 的零阶近似为 $\mathrm{R}_0(t) = \mathrm{I}$,$\mathrm{R}(t)$ 的一阶近似 $\mathrm{R}_1(t)$ 满足方程 $\frac{\mathrm{d}\mathrm{R}_1(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}(t)\cdot\mathrm{R}_0(t)$,即 $\mathrm{R}_1(t) = \mathrm{I} + \int \mathrm{A}(t_1)\mathrm{d}t_1$,$\mathrm{R}(t)$ 的二阶近似满足方程 $\frac{\mathrm{d}\mathrm{R}_2(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}(t)\mathrm{R}_1(t)$,即

$$\mathrm{R}_2(t) = \mathrm{I} + \int \mathrm{A}(t_1)\mathrm{d}t_1 + \int\int \mathrm{A}(t_1)\mathrm{A}(t_2)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1$$

$\mathrm{R}(t)$ 的 n 阶近似满足方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{R}_n(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}(t)\mathrm{R}_{n-1}(t)$$

即

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_n(t) = & \mathrm{I} + \int \mathrm{A}(t_1)\mathrm{d}t_1 + \int\int \mathrm{A}(t_1)\mathrm{A}(t_2)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 + \cdots \\ & + \int\int\cdots\int^{n-1} \mathrm{A}(t_1)\mathrm{A}(t_2)\cdots\mathrm{A}(t_n)\mathrm{d}t_n\mathrm{d}t_{n-1}\cdots\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 \end{aligned}$$

综合上述结果,得 $\mathrm{R}(t)$ 的表达式如下:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(t) = & \mathrm{I} + \int \mathrm{A}(t_1)\mathrm{d}t_1 + \iint \mathrm{A}(t_1)\mathrm{A}(t_2)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 + \cdots \\ & + \iint\cdots\int^{n-1} \mathrm{A}(t_1)\mathrm{A}(t_2)\cdots\mathrm{A}(t_n)\mathrm{d}t_n\mathrm{d}t_{n-1}\cdots\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 + \cdots \end{aligned} \tag{18}$$

(2) 变微分方程(14)为等价的积分方程

采用常数变易法将微分方程(14)变为等价的积分方程. 设方程(14)的解为

$$x(t) = R(t)C(t) \tag{19}$$

式中 $R(t)$ 为齐次方程(16)解的转移矩阵, $C(t)$ 为待求函数列向量. 又根据 $R(t)$ 的初始条件 $R(0) = I$, 可知 $C(t)$ 的初始条件为 $C(0) = x(0)$.

把式(19)代入式(14),有

$$\frac{dR(t)}{dt}C(t) + R(t)\frac{dC(t)}{dt} = A(t)R(t)C(t) + \Psi(x(t),t) + D\nabla_x \ln J(x(t),t)$$

利用式(17),则上式变为

$$R(t)\frac{dC(t)}{dt} = \Psi(x(t),t) + D\nabla_x \ln J(x(t),t)$$

将上式两边左乘以 $R^{-1}(t)$,并从 0 到 t 区间进行积分,可得 $C(t)$ 的表达式如下:

$$C(t) = x(0) + \int R^{-1}(\tau)\Psi(x(\tau),\tau)d\tau + \int R^{-1}(\tau)D\nabla_x \ln J(x(\tau),\tau)d\tau \tag{20}$$

把式(20)代入式(19),则得到与微分方程(14)等价的积分方程如下:

$$x(t) = R(t)x(0) + R(t)\int R^{-1}(\tau)\Psi(x(\tau),\tau)d\tau + R(t)\int R^{-1}(\tau)D\nabla_x \ln J(x(\tau),\tau)d\tau \tag{21}$$

方程(21)是第二类非线性随机 Volterra 积分方程.

(3) 积分方程(21)的任意阶近似解

文献[1,2]用逐次逼近法求解了第二类非线性 Volterra 积分方程的任意阶近似解. 把逐次逼近法推广,用以求解随机非线性积分方程(21)的任意阶近似解:

$$x^N(t) = R(t)x(0) + R(t)\int R^{-1}(\tau)\Psi(x^{(N-1)}(\tau),\tau)d\tau + R(t)\int R^{-1}(\tau)D\nabla_x \ln J(x^{(N-1)}(\tau),\tau)d\tau \tag{22}$$

4　方均包络矩阵转移方程

定义 1　若令 $\hat{x}(t) = n \times n$ 矩阵,即

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_1(t) & \cdots & x_1(t) \\ x_2(t) & x_2(t) & \cdots & x_2(t) \\ \cdots & \cdots & & \\ x_n(t) & x_n(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix} \tag{23}$$

则系统状态变量的方均包络矩阵为

$$\sigma(t) = \langle \hat{x}(t) \cdot \hat{x}^T(t) \rangle = \begin{bmatrix} \langle x_1^2(t) \rangle & \langle x_1(t)x_2(t) \rangle & \cdots & \langle x_1(t)x_n(t) \rangle \\ \langle x_2(t)x_1(t) \rangle & \langle x_2^2(t) \rangle & \cdots & \langle x_2(t)x_n(t) \rangle \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_n(t)x_1(t) \rangle & \langle x_n(t)x_2(t) \rangle & \cdots & \langle x_n^2(t) \rangle \end{bmatrix} \tag{24}$$

由于不确定随机性因素的存在,系统的状态总是处于理想状态附近,一个有限的状态空间内,其边界定义为一个状态空间椭球,即

定义 2　假定系统方均包络所对应的状态空间分布区域的边界为一 n 维状态空间椭球方程

$$x(t)\sigma^{-1}(t)x^T(t) = 1 \tag{25}$$

所描述.

下面我们讨论方均包络矩阵的转移方程.

(1) 线性转移方程

利用状态方程的线性近似解 $x(t) = R(t)x(0)$ 及式(23)和(24),显然有

$$\hat{x}(t) = R(t)\hat{x}(0)$$

$$\sigma(t) = \langle \hat{x}(t) \cdot \hat{x}^T(t) \rangle = \langle (R(t)\hat{x}(0) \cdot (R(t)\hat{x}(0))^T \rangle = R(t)\langle \hat{x}(0)\hat{x}^T(0) \rangle R^T(t) = R(t)\sigma(0)R^T(t) \tag{26}$$

此式即为线性近似下方均包络矩阵的转移方程.

将式(26)代入式(25),则得状态空间椭球转移方程:

$$x(t)\sigma^{-1}(t)x^T(t) = x(t)[R(t)\sigma(0)R^T(t)]^{-1}x^T(t) = 1 \tag{27}$$

式(26)和(27)表明在线性近似下,如果初始状态在状态空间分布的边界为一 n 维椭球,那么状态转移后仍为一椭球,只是其轴的大小和取向发生变化,而不会发生畸变.

(2) 非线性随机性对方均包络转移方程的影响

为讨论方便起见,我们令

$$G(x^{(N-1)}(t),t) = R(t)\int R^{-1}(\tau)\Psi(x^{(N-1)}(\tau),\tau)d\tau + R(t)\int R^{-1}(\tau)D\nabla_x \ln(x^{(N-1)}(\tau),\tau)d\tau \tag{28}$$

则非线性随机状态方程的任意阶近似解式(22)可写为

$$x^N(t) = R(t)x(0) + G(x^{(N-1)}(t),t) \tag{29}$$

于是

$$\hat{x}^N(t) = R(t)\hat{x}(0) + \hat{G}(x^{(N-1)}(t),t) \tag{30}$$

将式(30)代入式(24),有

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \langle \hat{x}(t) \cdot \hat{x}^T(t) \rangle \\ &= \langle [R(t)\hat{x}(0) + \hat{G}(x^{(N-1)}(t),t)] \cdot [R(t)\hat{x}(0) + \hat{G}(x^{(N-1)}(t),t)]^T \rangle \\ &= R(t)\sigma(0)R^T(t) + \langle R(t)\hat{x}(0) \cdot \hat{G}^T(x^{(N-1)}(t),t) \rangle \\ &\quad + \langle \hat{G}(x^{(N-1)}(t)) \cdot \hat{x}(0)R^T(t) \rangle \\ &\quad + \langle \hat{G}(x^{(N-1)}(t),t) \cdot \hat{G}^T(x^{(N-1)}(t),t) \rangle \end{aligned} \tag{31}$$

将式(31)代入式(25),有

$$\hat{x}^N(t)\sigma_N^{-1}(t)[\hat{x}^N(t)]^T = 1 \tag{32}$$

比较式(31)和式(26),发现,非线性及随机效应引起的 σ 矩阵的增量:

$$\Delta\sigma = \langle R(t)\hat{x}(0) \cdot \hat{G}(x^{(N-1)}(t),t) \rangle$$

$$+ \langle \hat{G}(x^{(N-1)}(t)) \cdot \hat{x}(0) R^{T}(t) \rangle$$
$$+ \langle \hat{G}(x^{(N-1)}(t), t) \cdot \hat{G}^{T}(x^{(N-1)}(t), t) \rangle \qquad (33)$$

根据 σ 矩阵的定义,这意味着非线性及随机效应将使系统的状态远离理想状态. 再联系式(32),可见这时虽然系统状态在状态空间分布的边界仍可限制一个 n 维椭球范围内,那么这个 n 维椭球将因非线性和随机效应而增大. 因此,在实际工作中,为使系统永远工作在理想状态附近,应尽量减小非线性和随机效应的影响,以确保系统的相对稳定性.

5 结论

本文从广义朗之万梯度方程出发,研究了自由系统的非线性、随机性状态方程的任意阶近似解. 运用常数变易法导出了与广义朗之万方程等价的广义的第二类非线性、随机性 Valterra 积分方程,采用逐次逼近法求得了方程的任意阶近似解,并进一步讨论了非线性、随机性对系统状态空间转移的影响.

参考文献:

[1] 刘纯亮,谢羲. 加速器非线性动力系统 Volterra 积分方程任意阶近似解析解[J]. 核科学与工程,1992,12(2):161 - 168.

Liu Chunliang, Xie Xi. Any order approximate analytical solution of the nonlinear volterra 's integral equation for accelerator dynamic systems[J]. Chinese Journal of Nuclear Science and Engineering,1992,12(2):161 - 168. (in Chinese)

[2] Liu Chunliang, Xie Xi, Chen Yinbao. Any order approximate analytical solution of the nonlinear volterra 's integral equation for accelerator dynamic systems[J]. Chin J Nucl Phys,1991,13(3):261 - 264.

[3] 王俊,奚宏生,季海波,康宇. 基于梯度算法的随机非线性系统鲁棒自适应控制[J]. 中国科学技术大学学报,2004,34(4):495 - 503.

Wang Jun, Xi Hongsheng, Ji Haibo, Kang Yu. Robust adaptive control for a class of stochastic nonlinear systems based on gradient algorithms[J]. Journal of University of Science and Technology of China,2004,34(4):495 - 503. (in Chinese)

[4] 黄玉林,张维海. 约束随机线性二次最优控制的研究[J]. 自动化学报,2006,32(2):246 - 254.

Huang Yulin, Zhang Weihai. Study on stochastic linear quadratic optimal control with constraint[J]. Acta Automatica Sinica, 2006,32(2):246 - 254. (in Chinese)

[5] 黎锁平,杜建军,张民悦,李骏. 随机控制理论研究内容及研究现状述评[J]. 兰州理工大学学报,2004,30(3):109 - 112.

Li Suoping, Du Jianjun, Zhang Minyue, Li Jun. Comment on topic and present states of investigation of stochastic control theory[J]. Journal of Lanzhou University of Technolog,2004, 30(3):109 - 112. (in Chinese)

[6] Deng H, Krstic M, Williams R J. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance[J]. Ieee Trans on Automatic Control,2001,46(8):1237 - 1253.

[7] Haddad W M, et al. Robust adaptive control of nonlinear uncertain systems[J]. Automatica. 2003,39(1):551 - 556.

[8] 格鲁脱 S R,等,陆全康译. 非平衡态热力学[M]. 上海科学技术出版社,1987.

S R Degroot, P Mazur. Translate by LU Quan-kang. Non-Equilibrium Thermodynamics[M]. Shanghai scientific & Technical Publishers,1987. (in Chinese)

作者简介:

曹少中 男,1965 年 2 月生于河北保定,北京科技大学控制科学与工程博士后流动站博士后,北京印刷学院副教授,博导. 研究方向:非线性系统理论、智能控制.

E-mail:cszh6502@163.com